# DIE KINEMATISCHE ERZEUGUNG VON MINIMALFLÄCHEN*

## ERSTE ABHANDLUNG

VON

PAUL STACKEL

### 1.

Eine krumme Fläche besitzt eine *kinematische Erzeugung*, wenn sie durch die Bewegung einer starren Curve nach einem bestimmten Gesetze entsteht (vergl. G. DARBOUX, *Leçons*, t. I, Livre 1, Chap. 9). Zu den so definierten Flächen, die man als kinematische Flächen bezeichnen könnte, gehören zum Beispiel die Drehungsflächen, die Schraubenflächen, die geradlinigen Flächen, die Gesimsflächen von Monge, die Translationsflächen. Einen besonderen Fall der Translationsflächen bilden die *Minimalflächen*, bei denen die erzeugenden Curven imaginäre Curven von verschwindendem Bogenelemente oder, wie S. LIE sagt, Minimalcurven sind. Dass Minimalflächen aber auch durch die Bewegung reeller Curven erzeugt werden können, zeigen die ältesten Beispiele solcher Flächen: die Umdrehungsfläche der Kettenlinie (L. EULER, 1744) und die gemeine geradlinige Schraubenfläche (CH. MEUSNIER, 1776). Ihnen fügte F. H. SCHERK (1831) die Minimalflächen hinzu, die zugleich Schraubenflächen sind, und er entdeckte auch eine Klasse von Minimalflächen, die sich durch Translation reeller Curven erzeugen lassen. Der Satz, dass diese Scherkschen Flächen nebst ihren Ausartungen die einzigen Minimalflächen sind, die durch Translation von Curven nicht verschwindenden Bogenelementes entstehen, rührt von S. LIE (1880) her; für genauere und ausführlichere Literaturangaben sei auf den Artikel: R. v. LILIENTHAL, *Besondere Flächen*, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band III, 3, Heft 2/3, 1903 verwiesen.

Da alle Minimalflächen durch Translation von Minimalcurven entstehen, besitzen die soeben aufgeführten Minimalflächen die Eigenschaft, eine *mehrfache* kinematische Erzeugung zu gestatten, und man gelangt so zu der Frage, welchen Minimalflächen überhaupt diese Eigenschaft zukommt. Ihrer Untersuchung sollen die folgenden Abhandlungen gewidmet sein, und in dieser *ersten* Abhandlung das Problem behandelt werden, *welche Minimalflächen mehrfache*

* Presented to the Society February 24, 1906. Received for publication January 2, 1906.

*Erzeugung durch Translation gestatten.* Da durch einen jeden regulären Flächenpunkt nur zwei auf der Fläche liegende Minimalcurven hindurchgehen, gibt es nur zwei Arten der Erzeugung dieser Flächen durch Translation von Minimalcurven, je nachdem man nämlich die eine oder die andere Schar der auf der Fläche liegenden Minimalcurven benutzt, wobei dann die Curven der anderen Schar die Rolle der Leitcurven spielen. Weitere Erzeugungen durch Translation sind demnach nur möglich, wenn man Curven nicht verschwindenden Bogenelementes einer Translation unterwirft. Um die Curven zu erhalten, die auf diese Weise Minimalflächen liefern, kann man das allgemeinere Problem untersuchen, alle Flächen zu bestimmen, die überhaupt auf mehr als zwei Arten durch Translation erzeugt werden können. Mit diesem allgemeineren Probleme hat sich S. LIE in den Jahren von 1872 bis 1896 eingehend beschäftigt, und er hat schliesslich gezeigt, wie man mittels der zu einer beliebigen ebenen Curve vierter Ordnung gehörigen Abelschen Integrale alle Flächen jener Eigenschaft finden kann; ein Verzeichnis der betreffenden Abhandlungen und eine neue, elegante Herleitung des Schlussergebnisses findet man bei G. SCHEFFERS, Acta mathematica, Band 28, S. 65 bis 66. Wie LIE selbst hervorgehoben hat, ergeben sich aus seinem allgemeinen Theoreme die Minimalflächen, welche mehrfache Translationsflächen sind, wenn die Curve vierter Ordnung, die man sich in der unendlich fernen Ebene zu denken hat, in einen Kegelschnitt und den imaginären Kugelkreis zerfällt. Die Ausführung der betreffenden Rechnungen bildet einen Teil der Dissertation von R. KUMMER, Leipzig, 1894, der auch von der speciellen SCHERKSCHEN Fläche $e^y = \sin x : \sin z$ ein Modell angefertigt hat, das sich in dem Besitze des Mathematischen Institutes der Universität Leipzig befindet.

Obgleich demnach die Aufgabe, alle Curven zu bestimmen, durch deren Translation Minimalflächen entstehen, als gelöst angesehen werden kann, bietet sich doch Veranlassung darauf zurückzukommen, denn es erscheint der Wunsch berechtigt, dass man eine directe Lösung angebe, bei der keine fernliegenden Hilfsmittel gebraucht werden, und man darf auch hoffen, dass sich daraus Anhaltspunkte für die Untersuchung des allgemeineren Problems ergeben werden, die Minimalflächen zu bestimmen, die einer mehrfachen kinematischen Erzeugung fähig sind. Eine Methode zu einer solchen directen Lösung habe ich in einer Note angegeben, die Herr D. HILBERT im Juli 1905 der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt hat. Die ausführliche Entwickelung und einige Ergänzungen sollen im Folgenden gegeben werden.

## 2.

Um einen Ansatz für die Bestimmung aller Curven zu gewinnen, durch deren Translation Minimalflächen entstehen können, hat man auszudrücken, dass eine Translationsfläche Minimalfläche sein soll. Wird eine solche Fläche durch die

Translation einer Curve $C_1$ erzeugt, so gestattet sie auch immer die Erzeugung durch eine zweite Curve $C_2$, und man erhält so für die rechtwinkligen cartesischen Coordinaten eines Flächenpunktes die Darstellung:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \int f(u)\,du + \int k(v)\,dv, \\ y = \int g(u)\,du + \int l(v)\,dv, \\ z = \int h(u)\,du + \int m(v)\,dv. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung, die mit GAUSS durch $E$, $F$, $G$; $D$, $D'$, $D''$ bezeichnet werden mögen, die Werte:

$$(2)\qquad \begin{cases} E = f^2 + g^2 + h^2, \\ F = fk + gl + hm, \\ G = k^2 + l^2 + m^2, \end{cases}$$

und

$$(3)\qquad \begin{cases} D = (hg' - gh')k + (fh' - hf')l + (gf' - fg')m, \\ D' = 0, \\ D'' = -f(ml' - lm') - g(km' - mk') - h(lk' - kl'), \end{cases}$$

wo $f'$, $g'$, $h'$ die Ableitungen von $f$, $g$, $h$ nach $u$ und $k'$, $l'$, $m'$ die Ableitungen von $k$, $l$, $m$ nach $v$ bedeuten.

Wenn die Fläche (1) eine Minimalfläche ist, so verschwindet ihre mittlere Krümmung, und es ist daher

$$ED'' - 2FD' + GD = 0,$$

also wegen (3):

$$(4)\qquad ED'' + GD = 0.$$

Die Gleichung (4) ist erfüllt, wenn man

$$E = 0, \qquad G = 0$$

setzt. Dann haben die erzeugenden Curven $C_1$ und $C_2$ verschwindendes Bogenelement, und die Fläche entsteht durch Translation von irgend zwei Minimalcurven; man gelangt auf diese Art zu *allen* Minimalflächen. Verschwindet nur $E$, während $G$ von Null verschieden ist, so folgt aus (4), dass $D = 0$ ist, mithin ist auch $DD'' - D'^2 = 0$, das Krümmungsmass verschwindet, und man erhält die *Ebene*. Zu demselben Ergebnisse kommt man, wenn $G$ verschwindet, während $E$ von Null verschieden ist. Wird also der triviale Fall der Ebene ausgeschlossen, so lassen sich diejenigen Minimalflächen, die nicht nur durch Translation von Minimalcurven, sondern auch durch Translation von Curven mit nicht verschwindendem Bogenelemente erzeugt werden können, characterisieren durch die Functionalgleichung:

$$(A)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{hg'-gh'}{f^2+g^2+h^2}\cdot k + \dfrac{fh'-hf'}{f^2+g^2+h^2}\cdot l + \dfrac{gf'-fg'}{f^2+g^2+h^2}\cdot m \\ \qquad -f\cdot\dfrac{ml'-lm'}{k^2+l^2+m^2} - g\cdot\dfrac{km'-mk'}{k^2+l^2+m^2} - h\cdot\dfrac{lk'-kl'}{k^2+l^2+m^2}, \end{cases}$$

deren vollständige Lösung zunächst entwickelt werden muss.

3.

Die Gleichung $(A)$, aus der die Functionen $f$, $g$, $h$ von $u$ und $k$, $l$, $m$ von $v$ zu ermitteln sind, gehört zu den Functionalgleichungen der Form

$$(F)\qquad f_1(u)k_1(v)+f_2(u)k_2(v)+\cdots+f_n(u)k_n(v)=0,$$

die in der Theorie der krummen Flächen nicht selten auftreten. Für $n=4$ hatte ihre Lösungen J. A. SERRET [Journ. de math. (1) 8 (1843)] angegeben, und der allgemeine Fall war dann von G. VIVANTI [Rend. circ. Palermo, 6 (1892)] und F. PROBST (Dissertation, Würzburg 1893) behandelt worden. Am einfachsten gelangt man wohl zu der Lösung von $(F)$, indem man den Begriff eines *r-gliedrigen Systems von n Functionen* $f_1(u), f_2(u), \cdots, f_n(u)$ einführt, nämlich ein solches System 0-, 1-, $\cdots$, $(n-1)$-gliedrig nennt, je nachdem zwischen den $n$ Functionen genau $n, n-1, \cdots, 1, 0$ von einander unabhängige lineare homogene Relationen mit constanten, also die Veränderliche $u$ nicht enthaltenden Coefficienten bestehen, und beachtet, dass sich die Functionen eines $r$-gliedrigen Systemes in der Gestalt darstellen lassen:

$$(P)\qquad f_\nu(u)=s_{\nu 1}p_1(u)+s_{\nu 2}p_2(u)+\cdots s_{\nu r}p_r(u)\quad (\nu=1,2,\cdots,n),$$

wobei erstens die $r$ Functionen $p_1, p_2, \cdots, p_r$ ein $r$-gliedriges System bilden, also, wie man zu sagen pflegt, linear unabhängig sind, und zweitens von den Determinanten $r$-ter Ordnung, die man aus je $r$ Zeilen der Matrix der $rn$ Constanten $s_{11}, \cdots, s_{nr}$ bilden kann, mindestens eine von Null verschieden ist. Man erkennt leicht, dass umgekehrt jedes System von Functionen $f_1(u), \cdots, f_n(u)$, die sich in der Gestalt $(P)$ darstellen lassen und zwar so, dass diese beiden Bedingungen erfüllt sind, genau $r$-gliedrig ist.

Bei der Lösung der Functionalgleichung $(F)$ hat man $n+1$ wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich das System der Functionen $f_1(u), \cdots, f_n(u)$ 0-, 1-, $\cdots$, $(n-1)$-, $n$-gliedrig ist. Ist es etwa $r$-gliedrig, so folgt aus $(F)$, wenn die Darstellung $(P)$ eingeführt wird, eine lineare homogene Relation zwischen den $r$ linear unabhängigen Functionen $p_1, \cdots, p_r$, die nur dann erfüllt sein kann, wenn die Coefficienten dieser $r$ Functionen alle identisch verschwinden. Auf diese Weise erhält man aus $(F)$ die $r$ Gleichungen:

$$s_{1\rho}k_1(v)+s_{2\rho}k_2(v)+\cdots+s_{n\rho}k_n(v)=0\quad (\rho=1,2,\cdots,r),$$

die wegen der Determinantenbedingung $r$ von einander unabhängige lineare homogene Relationen zwischen den $n$ Functionen $k_1(v), \cdots, k_n(v)$ sind. Hieraus ist zu schliessen, dass das System dieser $n$ Functionen höchstens $(n-r)$-gliedrig ist. Ist es $(n-r)$-gliedrig, so lassen sich die Functionen $k_1(v), \cdots, k_n(v)$ als lineare homogene Functionen von $n-r$ linear unabhängigen Functionen $q_1(v), \cdots, q_{n-r}(v)$ darstellen, deren Coefficienten die Determinantenbedingung erfüllen. Ist die Determinantenbedingung nicht erfüllt, so bilden die $n$ Functionen eine System, das weniger als $(n-r)$-gliedrig ist, und man beweist leicht, dass man *alle* $(n-r-1)$-, $(n-r-2)$-, $\cdots$, 1-, 0-gliedrigen Systeme von $n$ Functionen bekommt, indem man die Coefficienten in der Darstellung durch die $q_1, \cdots, q_{n-r}$ geeignet wählt, oder, mit anderen Worten, dass die $(n-r)$-gliedrigen Systeme die weniger gliedrigen Systeme als Ausartungen in sich schliessen. Hieraus aber folgt, dass die Functionalgleichung $(F)$, wenn die $f_1, \cdots, f_n$ ein $r$-gliedriges System bilden, in allgemeinster Weise erfüllt wird, indem man die $k_1, \cdots, k_n$ als beliebige lineare homogene Functionen von irgend welchen $n-r$ Functionen $q_1(v), \cdots, q_{n-r}(v)$ ansetzt, die nun auch nicht mehr linear unabhängig zu sein brauchen.

4.

Bei der Functionalgleichung $(A)$ ist $n=6$, und man hat zu setzen:

$$f_1 = \frac{hg'-gh'}{f^2+g^2+h^2}, \quad f_2 = \frac{fh'-hf'}{f^2+g^2+h^2}, \quad f_3 = \frac{gf'-fg'}{f^2+g^2+h^2},$$

$$f_4 = f, \quad f_5 = g, \quad f_6 = h;$$

$$k_1 = k, \quad k_2 = l, \quad k_3 = m,$$

$$k_4 = \frac{lm'-ml'}{k^2+l^2+m^2}, \quad k_5 = \frac{km'-mk'}{k^2+l^2+m^2}, \quad k_6 = \frac{lk'-kl'}{k^2+l^2+m^2}.$$

Das System der Functionen $f_1, f_2, \cdots, f_6$ kann hier 0-, 1-, $\cdots$, 5-, 6-gliedrig sein, und dann ist das System der Functionen $k_1, k_2, \cdots, k_6$ höchstens 6-, 5-, $\cdots$, 1-, 0-gliedrig. Nun behält aber die Gleichung (1) ihre Form, wenn man darin $u$ und $v$ vertauscht, und dasselbe gilt von der Functionalgleichung $(A)$. Mithin darf man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass das System der Functionen $f_1, f_2, \cdots, f_6$ höchstens dreigliedrig sei. Ist es 0-, 1-, 2-gliedrig, so besteht zwischen $f, g, h$ mindestens eine lineare homogene Relation, mithin genügen die Coordinaten der erzeugenden Curve $C_1$ mindestens einer linearen Gleichung und diese Curve ist *eben*. Dasselbe findet aber auch statt, wenn zwar das System der $f_1, f_2, \cdots, f_6$ dreigliedrig ist, das System der $f, g, h$ aber höchstens zweigliedrig ausfällt. Dann und nur dann, wenn das System der $f, g, h$ dreigliedrig ist, erhält man eine eigentliche Raumcurve $C_1$. Es erweist sich als zweckmässig, den Fall einer ebenen Curve $C_1$ zuerst für sich zu erledigen und darauf den erheblich schwierigeren Fall zu betrachten, dass $C_1$ eine eigentliche Raumcurve ist.

5.

Legt man die $y$-Achse in die Ebene der Curve $C_1$, so hat die Gleichung der Ebene die Form:

$$\sin\alpha\cdot x-\cos\alpha\cdot y=0,$$

und es ist daher auch

$$\sin\alpha\cdot f(u)-\cos\alpha\cdot h(u)=0,$$

also

$$f(u)=\cos\alpha\cdot U(u),\qquad h(u)=\sin\alpha\cdot U(u).$$

Nun kann $U(u)$ nicht identisch verschwinden, denn sonst wäre $C_1$ eine Gerade und die dadurch erzeugte Minimalfläche eine Ebene, mithin darf man

$$u_1=\int U(u)\,du$$

als neuen Parameter einführen und erhält, wenn der Index 1 wieder fortgelassen wird:

$$f(u)=\cos\alpha,\qquad h(u)=\sin\alpha.$$

Werden diese Werte von $f$ und $h$ in die Functionalgleichung $(A)$ eingesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$(A^*)\qquad \begin{aligned}0=\frac{g'}{1+g^2}\cdot(\sin\alpha\cdot k-\cos\alpha\cdot m)-\frac{\cos\alpha(ml'-lm')}{k^2+l^2+m^2}\\ -g\frac{km'-mk'}{k^2+l^2+m^2}-\frac{\sin\alpha(lk'-kl')}{k^2+l^2+m^2}.\end{aligned}$$

Aus $(A^*)$ folgt durch Differentiation nach $u$:

$$(5)\qquad 0=\frac{d}{du}\frac{g'}{1+g^2}\cdot(\sin\alpha\cdot k-\cos\alpha\cdot m)-g'\frac{km'-mk'}{k^2+l^2+m^2}.$$

Nun ist $g'$ von Null verschieden, denn sonst wären $f$, $g$, $h$ alle drei constant, und die Curve $C_1$ wäre eine Gerade. Ebenso kann $\sin\alpha\cdot k-\cos\alpha\cdot m$ nicht verschwinden, denn sonst lägen die beiden durch einen Punkt der Fläche gehenden erzeugenden Curven in einer und derselben Ebene, wenn man also die eine davon festhält und die andere daran parallel verschiebt, erhielte man als Fläche diese Ebene selbst. Mithin darf man (5) durch $g'\cdot(\sin\alpha\cdot k-\cos\alpha\cdot m)$ dividieren und gelangt so zu der Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{1}{g'}\frac{d}{du}\frac{g'}{1+g^2}=\frac{km'-mk'}{(\sin\alpha\cdot k-\cos\alpha\cdot m)(k^2+l^2+m^2)},$$

aus der folgt, dass die Ausdrücke links und rechts sich auf eine und dieselbe *Constante* $A$ reducieren.

Ist die Constante $A=0$, so verschwindet $km'-mk'$, folglich besteht zwischen $m$ und $k$ eine lineare homogene Relation und daher zwischen den Coordinaten der Curve $C_2$ eine lineare Gleichung, das heisst aber, auch die Curve $C_2$ ist *eben*.

Ist die Constante $A$ von Null verschieden, so wird nach (6), wenn $B$ eine neue Constante bedeutet:

$$\frac{g'}{1+g^2} = Ag + B.$$

Wird dieser Ausdruck für $g' : (1 + g^2)$ und der aus (6) folgende Wert

$$\frac{1}{A} \frac{km' - mk'}{k^2 + l^2 + m^2}$$

von $\sin\alpha \cdot k - \cos\alpha \cdot m$ in die Gleichung $(A^*)$ eingetragen, so erhält man:

$$(7) \qquad -\cos\alpha(ml' - lm') + \frac{B}{A}(km' - mk') - \sin\alpha(lk' - kl') = 0,$$

aus dieser Gleichung aber lässt sich folgern, dass zwischen $k$, $l$, $m$ eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, sodass die Curve $C_2$, auch wenn $A$ nicht verschwindet, *eben* ist.

Dass aus (7) die Existenz einer linearen homogenen Relation zwischen $k$, $l$, $m$ folgt, beruht auf dem allgemeinen Satze:

*Sind $a$, $b$, $c$ Constanten, die nicht alle drei verschwinden, und besteht für die Functionen $k$, $l$, $m$ von $v$ die Identität:*

$$(J) \qquad a(ml' - lm') + b(km' - mk') + c(lk' - kl') = 0,$$

*so sind $k$, $l$, $m$ durch eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten verbunden.*

Zum Beweise differentiiere man $(J)$ nach $v$, wodurch die weitere Identität

$$(K) \qquad a(ml'' - lm'') + b(km'' - mk'') + c(lk'' - kl'') = 0$$

entsteht, und ordne $(J)$ nach $k'$, $l'$, $m'$, $(K)$ aber nach $k''$, $l''$, $m''$. Die Ableitungen von $k$, $l$, $m$ erhalten dann beziehungsweise dieselben Coefficienten $cl - bm$, $am - ck$, $bk - al$, und es sind also entweder die $k'$, $l'$, $m'$ den $k''$, $l''$, $m''$ oder die $cl - bm$, $am - ck$, $bk - al$ den Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} k' & l' & m' \\ k'' & l'' & m'' \end{pmatrix}$$

proportional. In beiden Fällen verschwindet aber die Determinante

$$\begin{vmatrix} k & l & m \\ k' & l' & m' \\ k'' & l'' & m'' \end{vmatrix},$$

und das bedeutet bekanntlich, dass zwischen $k$, $l$, $m$ eine lineare homogene Relation besteht.

Wenn die Curven $C_1$ und $C_2$ beide *eben* sind, so dürfen sie nicht in parallelen Ebenen liegen, da man sonst, wie soeben gezeigt wurde, eine Ebene erhalten würde. Mithin darf man die Schnittlinie der Curvenebenen zur $y$-Achse machen und erhält dann von vorn herein, indem wie $u$ bei der Curve $C_1$ jetzt auch bei der Curve $C_2$ der Parameter $v$ geeignet gewählt wird:

$$k = \cos\beta, \qquad m = \sin\beta.$$

Dann aber wird nach (6) $A = 0$. Folglich genügt $g$ der Gleichung

$$g' : (1 + g^2) = B,$$

und es ist daher

$$g(u) = \operatorname{tg}(Bu + C),$$

wo $C$ eine neue Constante bezeichnet, die jedoch unbeschadet der Allgemeinheit sofort gleich Null gesetzt werden darf, denn man darf statt $u$ als Parameter $u_1 = u + C : B$ einführen, wobei $f$ und $h$ ihre Werte behalten, während $g$ in $\operatorname{tg} Bu_1$ übergeht.

Um noch $l(v)$ zu bestimmen, setze man die gefundenen Werte von $f, g, h$; $k, m$ in die Gleichung ($A^*$) ein. Dann ergibt sich nach Division mit der von Null verschiedenen Grösse $\sin(\alpha - \beta)$ die Gleichung:

$$0 = B + l' : (1 + l^2),$$

aus der man

$$l(v) = -\operatorname{tg}(Bv + D)$$

erhält, wo aber die Constante $D$ wieder sofort gleich Null gesetzt werden darf.

Durch Ausführung der Quadraturen gewinnt man endlich für diejenigen Minimalflächen, die sich durch die Translation einer ebenen Curve von nicht verschwindendem Bogenelemente erzeugen lassen, die Darstellung:

$$x = \cos\alpha \cdot u + \cos\beta \cdot v,$$

$$y = -\frac{1}{B}\log\cos Bu + \frac{1}{B}\log\cos Bv,$$

$$z = \sin\alpha \cdot u + \sin\beta \cdot v.$$

Um sie zu vereinfachen, bedenke man, dass es genügt, von den einander ähnlichen Flächen der gesuchten Gattung je einen Repräsentanten anzugeben, sodass man $x, y, z$, durch $Bx, By, Bz$, ersetzen darf. Werden ferner statt $u$ und $v$ als Parameter $u : B$ und $v : B$ eingeführt und wird noch die $xz$-Ebene um die festgehaltene $y$-Achse um den Winkel $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ gedreht, so ergibt sich die Darstellung

$$(M) \qquad \begin{cases} x = \sin\gamma \cdot (u + v), \\ y = -\log\cos u + \log\cos v, \\ z = \cos\gamma \cdot (u - v), \end{cases}$$

bei der $\gamma$ das Complement von $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ bezeichnet.

Die Gleichungen $(M)$ zeigen, dass *die gefundenen Flächen* die *Scherkschen Minimalflächen*

$$(M^*) \qquad e^y = \frac{\cos(\rho x - rz)}{\cos(\rho x + rz)} \qquad (\rho = 1:2\sin\gamma,\ r = 1:2\cos\gamma)$$

*und die durch Aehnlichkeitstransformationen daraus hervorgehenden Flächen sind;* für $\gamma = \pi/4$ entsteht die besondere von R. KUMMER modellierte Fläche.

## 6.

Nunmehr soll angenommen werden, dass die Curve $C_1$ eine *eigentliche Raumcurve sei*, sodass die Functionen $f$, $g$, $h$, ein dreigliedriges System bilden, also linear unabhängig sind. Da die Functionen $f_1, f_2, \cdots, f_6$ auch ein dreigliedriges System bilden sollten, darf man zu ihrer Darstellung $(P)$ als linear unabhängige Functionen $p_1$, $p_2$, $p_3$ gerade $f$, $g$, $h$ selbst wählen und erhält dann $f_1$, $f_2$, $f_3$ als lineare homogene Functionen von $f$, $g$, $h$, oder:

$$(B) \qquad \begin{cases} \dfrac{hg' - gh'}{f^2 + g^2 + h^2} = s_{11}f + s_{12}g + s_{13}h, \\[2ex] \dfrac{fh' - hf'}{f^2 + g^2 + h^2} = s_{21}f + s_{22}g + s_{23}h, \\[2ex] \dfrac{gf' - fg'}{f^2 + g^2 + h^2} = s_{31}f + s_{32}g + s_{33}h. \end{cases}$$

Werden diese Ausdrücke in $(A)$ eingesetzt, so folgt, weil $f$, $g$, $h$ linear unabhängig sind, dass $k$, $l$, $m$ den Gleichungen genügen müssen:

$$(C) \qquad \begin{cases} \dfrac{ml' - lm'}{k^2 + l^2 + m^2} = s_{11}k + s_{21}l + s_{31}m, \\[2ex] \dfrac{km' - mk'}{k^2 + l^2 + m^2} = s_{12}k + s_{22}l + s_{32}m, \\[2ex] \dfrac{lk' - kl'}{k^2 + l^2 + m^2} = s_{13}k + s_{23}l + s_{33}m. \end{cases}$$

Sind umgekehrt die sechs Gleichungen $(B)$ und $(C)$ erfüllt, so besteht auch die Gleichung $(A)$. Da $(B)$ und $(C)$ dieselbe Structur haben, wird die Untersuchung von $(B)$, die jetzt vorgenommen werden soll, alles liefern, was zur Lösung von $(A)$ erforderlich ist.

Die noch unbekannten Werte der neun Constanten $s_{11}, \cdots, s_{33}$ sind jedenfalls so beschaffen, dass die Determinante

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Wäre nämlich $S = 0$, so gäbe es drei Constanten $a$, $b$, $c$, die nicht alle verschwinden, sodass identisch

$$a(gh' - hg') + b(hf' - fh') + c(fg' - gf') = 0$$

ist, zwischen $f$, $g$, $h$ bestände also eine lineare homogene Relation und die Curve $C_1$ wäre, gegen die Voraussetzung, eben. Auf der anderen Seite behalten aber die Gleichungen ($A$) ihren Sinn, auch wenn die Determinante $S$ verschwindet. Sie liefern dann Minimalflächen, die durch Translation einer *ebenen* Curve nicht verschwindenden Bogenelementes entstehen und sich, da man bei stetiger Variation der Constanten $s_{11}, \cdots, s_{33}$ von einem beliebigen Werte der Determinante $S$ stetig zu dem Werte Null übergehen kann, den Minimalflächen einreihen lassen, die bei einem von Null verschiedenen $S$ entstehen; es wird sich später zeigen, dass man auf diese Weise genau zu den Flächen gelangt, die bereits gefunden worden sind, nämlich zu den Scherkschen Minimalflächen, dass sich aber auch, wenn $S$ von Null verschieden ist, aus den Gleichungen ($B$) und ($C$) wiederum die Scherkschen Minimalflächen ergeben, ein Paradoxon, das sich dadurch aufklärt, dass diese Flächen auf unendlich viele Arten durch Translation von Curven erzeugt werden können und dass sich, abgesehen von den gemeinen geradlinigen Schraubenflächen, die zwar Ausartungen der Scherkschen Flächen sind, aber einen Platz für sich einnehmen, unter den unendlich vielen erzeugenden Curven auch immer ebene Curven befinden.

## 7.

Wenn man die Gleichungen ($B$) der Reihe nach mit $f$, $g$, $h$ multipliciert und addiert, so ergibt sich die von den Ableitungen freie Gleichung:

$$(D)\quad s_{11}f^2 + s_{22}g^2 + s_{33}h^2 + (s_{12} + s_{21})fg + (s_{23} + s_{32})gh + (s_{31} + s_{13})hf = 0\,;$$

sie ist, nebenbei bemerkt, die Gleichung in homogenen Coordinaten des Kegelschnittes, der bei S. Lie den einen Bestandteil der zerfallenden Curve vierter Ordnung bildet. Die Gleichung ($D$) kann nicht identisch in $f$, $g$, $h$ bestehen, denn dann wäre

$$s_{11} = 0,\ s_{22} = 0,\ s_{33} = 0,\ s_{21} = -s_{12},\ s_{32} = -s_{23},\ s_{31} = -s_{13}$$

und daher $S = 0$. Sie lässt sich erheblich vereinfachen, wenn das Coordinatensystem der $x$, $y$, $z$ geeignet gewählt wird.

Da eine Translation der Achsen keinen Einfluss auf die $f$, $g$, $h$ hat, soll eine Drehung vorgenommen, also die orthogonale Substitution

$$x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta,$$
$$y = \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta,$$
$$z = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta$$

gemacht werden. Wenn die Coordinaten der Curve $C_1$ in dem Systeme der $x, y, z$ die Werte hatten:

$$x_1 = \int f(u)\,du, \qquad y_1 = \int g(u)\,du, \qquad z_1 = \int h(u)\,du,$$

so ergibt sich jetzt für die Coordinaten $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ die Darstellung

$$\xi_1 = \int \phi(u)\,du, \qquad \eta_1 = \int \chi(u)\,du, \qquad \zeta_1 = \int \psi(u)\,du,$$

in der

$$\phi(u) = \alpha_1 f(u) + \beta_1 g(u) + \gamma_1 h(u),$$
$$\chi(u) = \alpha_2 f(u) + \beta_2 g(u) + \gamma_2 h(u),$$
$$\psi(u) = \alpha_3 f(u) + \beta_3 g(u) + \gamma_3 h(u)$$

zu setzen ist. Vermöge der Gleichungen ($B$) erhält man für die Functionen $\phi$, $\chi$, $\psi$ die äquivalenten Gleichungen:

$$\frac{\psi\chi' - \chi\psi'}{\phi^2 + \chi^2 + \psi^2} = \sigma_{11}\phi + \sigma_{12}\chi + \sigma_{13}\psi,$$
$$\frac{\phi\psi' - \psi\phi'}{\phi^2 + \chi^2 + \psi^2} = \sigma_{21}\phi + \sigma_{22}\chi + \sigma_{23}\psi,$$
$$\frac{\chi\phi' - \phi\chi'}{\phi^2 + \chi^2 + \psi^2} = \sigma_{31}\phi + \sigma_{32}\chi + \sigma_{33}\psi,$$

in denen die Coefficienten $\sigma_{11}, \cdots, \sigma_{33}$ folgende Werte haben:

$$\sigma_{ij} = (s_{11}\alpha_j + s_{12}\beta_j + s_{13}\gamma_j)\alpha_i + (s_{21}\alpha_j + s_{22}\beta_j + s_{23}\gamma_j)\beta_i$$
$$+ (s_{31}\alpha_j + s_{32}\beta_j + s_{33}\gamma_j)\gamma_i \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Setzt man jetzt

$$\sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{13} = 0,$$

so ergeben sich für die Richtungscosinus $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ der $\xi$-Achse zwei lineare homogene Gleichungen, aus denen man in der bekannten Weise die Verhältnisse der $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ berechnen kann, vorausgesetzt, dass nicht alle Determinanten zweiter Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} s_{11}\alpha_2 + s_{12}\beta_2 + s_{13}\gamma_2, & s_{21}\alpha_2 + s_{22}\beta_2 + s_{23}\gamma_2, & s_{31}\alpha_2 + s_{32}\beta_2 + s_{33}\gamma_2 \\ s_{11}\alpha_3 + s_{12}\beta_3 + s_{13}\gamma_3, & s_{21}\alpha_3 + s_{22}\beta_3 + s_{23}\gamma_3, & s_{31}\alpha_3 + s_{32}\beta_3 + s_{33}\gamma_3 \end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Für diese Determinanten ergeben sich aber, wenn die adjungierten Grössen von $s_{11}, \cdots, s_{33}$ mit $t_{11}, \cdots, t_{33}$ bezeichnet und die Relationen

$$\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 = \alpha_1, \qquad \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3 = \beta_1, \qquad \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \gamma_1,$$

benutzt werden, die Werte

$$t_{11}\alpha_1 + t_{12}\beta_1 + t_{13}\gamma_1, \qquad t_{21}\alpha_1 + t_{22}\beta_1 + t_{23}\gamma_1, \qquad t_{31}\alpha_1 + t_{32}\beta_1 + t_{33}\gamma_1,$$

und diese können, da ja die Richtungscosinus $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ sicher nicht alle drei gleich Null sind, nur dann sämtlich verschwinden, wenn die Determinante der $t_{11}, \cdots, t_{33}$ verschwindet; diese ist aber gleich $S^2$. Mithin folgt aus den Gleichungen

$$\sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{13} = 0,$$

dass

$$\alpha_1 = \mu(t_{11}\alpha_1 + t_{12}\beta_1 + t_{13}\gamma_1),$$
$$\beta_1 = \mu(t_{21}\alpha_1 + t_{22}\beta_1 + t_{23}\gamma_1),$$
$$\gamma_1 = \mu(t_{31}\alpha_1 + t_{32}\beta_1 + t_{33}\gamma_1)$$

ist, wo man den Proportionalitätsfactor $\mu$ aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mu t_{11} - 1 & \mu t_{12} & \mu t_{13} \\ \mu t_{21} & \mu t_{22} - 1 & \mu t_{23} \\ \mu t_{31} & \mu t_{32} & \mu t_{33} - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

zu bestimmen hat. Hieraus ergeben sich aber, da das absolute Glied gleich $-1$ ist, stets von Null verschiedene Werte des Factors $\mu$. Da ferner der Coefficient von $\mu^3$ gleich $S^2$, also von Null verschieden ist, so gibt es bei reellen Werten der $s_{11}, \cdots, s_{33}$ immer mindestens einen reellen Wert von $\mu$, also auch mindestens ein System reeller Werte der $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ und daher auch mindestens eine reelle Transformation der Coordinaten $x$, $y$, $z$, bei der $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} = 0$ wird.

Hiermit ist bewiesen, dass man von vornherein annehmen darf, die Constanten $s_{12}$ and $s_{13}$ seien gleich Null.

Man könnte jetzt fragen, ob es nicht möglich sei, auch noch eine dritte der Constanten $s_{11}, \cdots, s_{33}$ durch geeignete Wahl der Coordinaten zum Verchwinden zu bringen. Da $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ bereits bestimmt sind, also die Lage der $x$-Achse festgelegt ist, so steht nur noch eine Drehung um die $x$-Achse frei, man hat demnach

$$x = \xi, \qquad y = \eta\cos\vartheta - \zeta\sin\vartheta, \qquad z = \eta\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta$$

zu setzen. Bildet man nach den vorher angegebenen Formeln die Grössen $\sigma_{11}, \cdots, \sigma_{33}$, so wird zunächst

$$\sigma_{11} = s_{11}, \qquad \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{13} = 0,$$

und man erhält weiter

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= s_{21}\cos\vartheta + s_{31}\sin\vartheta, & \sigma_{22} &= s_{22}\cos^2\vartheta + (s_{23} + s_{32})\cos\vartheta\sin\vartheta + s_{33}\sin^2\vartheta, \\ & & \sigma_{23} &= (s_{33} - s_{22})\sin\vartheta\cos\vartheta + s_{23}\cos^2\vartheta - s_{32}\sin^2\vartheta; \\ \sigma_{31} &= -s_{21}\sin\vartheta + s_{31}\cos\vartheta, & \sigma_{32} &= (s_{33} - s_{22})\sin\vartheta\cos\vartheta - s_{23}\sin^2\vartheta + s_{32}\cos^2\vartheta, \\ & & \sigma_{33} &= s_{22}\sin^2\vartheta - (s_{23} + s_{32})\sin\vartheta\cos\vartheta + s_{33}\cos^2\vartheta. \end{aligned}$$

Wie sich sogleich zeigen wird, hat es nur einen Nutzen $\sigma_{23}$ oder $\sigma_{32}$ zum Verschwinden zu bringen, dafür aber erhält man Gleichungen zweiten Grades in $\operatorname{tg}\vartheta$, bei denen die Realität der Wurzeln ungewiss bleibt. Deshalb ist es besser, mit der Bestimmung von $\vartheta$ zu warten, bis weitere Folgerungen aus dem Verschwinden von $s_{12}$ und $s_{13}$ gezogen worden sind.

## 8.

Weil $C_1$ eine eigentliche Raumcurve ist, kann sich die zugehörige $x$-Coordinate nicht auf eine Constante reducieren, mithin ist $x$ eine wirkliche Function von $u$, die man gleich dem neuen Parameter $u_1$ setzen darf. Folglich ist es gestattet, von vornherein $f(u) = 1$ anzunehmen. Bei dieser Annahme erhält man, wenn noch berücksichtigt wird, dass $s_{12} = 0$, $s_{13} = 0$ ist, an Stelle der Gleichungen $(B)$ die einfacheren Gleichungen:

$$(B')\qquad \begin{cases} \dfrac{hg' - gh'}{1 + g^2 + h^2} = s_{11}, \\[2ex] \dfrac{h'}{1 + g^2 + h^2} = s_{21} + s_{22}g + s_{23}h, \\[2ex] \dfrac{-g'}{1 + g^2 + h^2} = s_{31} + s_{32}g + s_{33}h, \end{cases}$$

und die Relation $(D)$ geht über in:

$$(D')\qquad 0 = s_{11} + (s_{21} + s_{22}g + s_{23}h)g + (s_{31} + s_{32}g + s_{33}h)h.$$

Diese Relation differentiiere man nach $u$ und setze in dem Ergebnis für $g'$ und $h'$ die aus den beiden letzten Gleichungen $(B')$ folgenden Werte ein. Dann kommt:

$$(E')\quad 0 = (s_{23}g + s_{33}h)(s_{21} + s_{22}g + s_{23}h) - (s_{22}g + s_{32}h)(s_{31} + s_{32}g + s_{33}h).$$

Die Gleichung $(E')$ ist keine algebraische Folge von $(D')$, denn sie kann daraus nicht durch Multiplication mit einem constanten Factor hervorgehen. Sie kann aber auch keine wirkliche Relation zwischen $g$ und $h$ sein, denn sonst beständen zwischen diesen beiden Functionen zwei Relationen und sie würden sich auf Constanten reducieren, mithin müsste die Curve $C_1$ eben, ja sogar eine gerade Linie sein. Folglich ist $(E')$ eine Identität in $g$ und $h$, und wenn man die rechte Seite als Polynom in $g$ und $h$ darstellt, verschwinden alle Coefficienten. Zunächst ist also

$$s_{23}s_{21} - s_{22}s_{31} = 0, \qquad s_{33}s_{21} - s_{32}s_{31} = 0,$$

und da jetzt die Determinante

$$S = s_{11}(s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32})$$

ist, so folgt, dass

$$s_{21} = 0, \qquad s_{31} = 0$$

sein muss. Weiter ergibt sich aus dem Verschwinden des Coefficienten von $gh$, dass entweder

$$s_{32} = s_{23}$$

oder

$$s_{32} = - s_{23}$$

ist. In dem ersten Fall verschwinden auch die Coefficienten von $g^2$ und $h^2$, und $(E')$ ist eine Identität. In dem zweiten bedingt das Verschwinden dieser Coefficienten, dass entweder $s_{23} = s_{32} = 0$ ist, was auf den ersten Fall zurückleitet, oder dass $s_{22} = s_{33} = 0$ ist, das ist aber unmöglich, da alsdann $S$ gleich Null sein würde.

Damit ist folgendes Ergebnis gewonnen: wenn die Gleichungen $(B')$ mit einander verträglich sein sollen, so müssen die Relationen bestehen:

$$s_{21} = 0, \qquad s_{31} = 0, \qquad s_{32} = s_{23}.$$

Die Gleichungen $(B')$ haben also notwendig die Form:

$$(B'') \qquad \begin{cases} \dfrac{hg' - gh'}{1 + g^2 + h^2} = s_{11}, \\ \dfrac{h'}{1 + g^2 + h^2} = s_{22} g + s_{23} h, \\ \dfrac{-g'}{1 + g^2 + h^2} = s_{23} g + s_{33} h. \end{cases}$$

9.

Jetzt ist es Zeit, die vorher betrachtete Drehung um die $x$-Achse auszuführen. Für die Coefficienten $\sigma_{11}, \cdots, \sigma_{33}$ ergeben sich dann die Werte:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{11} = s_{11}, & \sigma_{12} = 0, & \sigma_{13} = 0; \\ \sigma_{21} = 0, & \sigma_{22} = s_{22} \cos^2 \vartheta + 2 s_{23} \cos \vartheta \sin \vartheta + s_{33} \sin^2 \vartheta, & \\ & \sigma_{23} = (s_{33} - s_{22}) \sin \vartheta \cos \vartheta + s_{23} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta); & \\ \sigma_{31} = 0, & \sigma_{32} = (s_{33} - s_{22}) \sin \vartheta \cos \vartheta + s_{23} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta), & \\ & \sigma_{33} = s_{22} \sin^2 \vartheta + 2 s_{23} \cos \vartheta \sin \vartheta + s_{33} \cos^2 \vartheta. & \end{array}$$

Mithin ist $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ und diese beiden Coefficienten verschwinden, wenn der Drehungswinkel $\vartheta$ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 s_{23}}{s_{22} - s_{33}}$$

bestimmt wird, was bei reellen Werten von $s_{11}, \cdots, s_{33}$ stets auf reelle Art möglich ist. Folglich gibt es stets mindestens ein (bei reellen Flächen reelles)

Coordinatensystem, bei dem sich das System der Gleichungen ($B$) in der einfachen Form darstellt:

$$(B^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{hg' - gh'}{1+g^2+h^2} = s_{11}, \\[2ex] \dfrac{h'}{1+g^2+h^2} = s_{22}\,g, \\[2ex] \dfrac{-g'}{1+g^2+h^2} = s_{33}\,h; \end{cases}$$

hierin bedeuten $s_{11}$, $s_{22}$, $s_{33}$ von Null verschiedene Constanten, die keiner weiteren Bedingung unterworfen sind.

Aus den beiden letzten Gleichungen ($B^*$) folgt durch Division

$$-\frac{h'}{g'} = \frac{s_{22}\,g}{s_{33}\,h},$$

also ist

$$s_{22}\,g g' + s_{33}\,h h' = 0,$$

und man hat die Integralgleichung:

$$(8)\qquad s_{22}\,g^2 + s_{33}\,h^2 = \text{const.}$$

Nimmt man jetzt die erste der Gleichungen ($B^*$) hinzu, so ergibt sich durch Combination mit den beiden letzten die schon früher aufgestellte Relation ($D$), die nunmehr die Gestalt annimmt:

$$(D^*)\qquad s_{11} + s_{22}\,g^2 + s_{33}\,h^2 = 0.$$

Folglich besagt die erste der Gleichungen ($D^*$), dass die beiden letzten mit der Massgabe integriert werden sollen, dass die Constante in der Integralgleichung (8) den Wert

$$-\,s_{11}$$

erhält.

Zur Abkürzung möge

$$-\,s_{11} : s_{33} = A, \qquad -\,s_{22} : s_{33} = B$$

gesetzt werden. Dann geht die Gleichung (8) über in die Gleichung:

$$h = \sqrt{A + Bg^2};$$

das Vorzeichen der Wurzel darf beliebig gewählt werden. Aus der letzten der Gleichungen ($B^*$) ergibt sich dann zur Bestimmung von $g$ die Gleichung

$$(9)\qquad g' = -\,s_{33}\,[\,1 + A + (1+B)g^2\,]\,\sqrt{A + Bg^2}.$$

Ganz entsprechende Gleichungen erhält man aus den Gleichungen ($C$) für die Functionen $k$, $l$, $m$. Es wird

$$k = 1, \qquad m = \sqrt{A + Bl^2},$$

und $l$ ist zu bestimmen aus der Gleichung

$$(10) \qquad l' = -s_{33}[1 + A + (1 + B)l^2]\sqrt{A + Bl^2};$$

das Vorzeichen der Quadratwurzel darf wieder beliebig gewählt werden.

## 10.

Bei der Bestimmung von $g$ und $l$ aus den Gleichungen (9) und (10) bedürfen die Fälle, dass zwei der Grössen $s_{11}$, $s_{22}$, $s_{33}$, einander gleich werden, also die Fälle:

$$\text{I.}\quad A = -1, \qquad \text{II.}\quad B = -1, \qquad \text{III.}\quad A = B$$

einer besonderen Behandlung, die vorweg erledigt werden soll.

I. Ist $A = -1$, so setze man $B = c^2$. Dann wird

$$g = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2}}, \qquad h = \frac{u_1}{\sqrt{1 - u_1^2}},$$

wenn zur Abkürzung

$$-s_{33}\frac{1 + c^2}{c}u = u_1$$

gesetzt wird. Hieraus folgt für

$$u_1 = \sin p,$$

dass die Coordinaten $x_1$, $y$, $z$ der Curve $C_1$ bis auf einen und denselben constanten Factor gleich

$$c\cdot\sin p, \qquad \pm p, \qquad \pm c\cdot\cos p$$

sind, wobei entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten. Da es genügt, von den einander ähnlichen Flächen der betrachteten Art je einen Repräsentanten anzugeben, ist es erlaubt, $x_1$, $y_1$, $z_1$ gleich diesen Ausdrücken setzen; auch darf man unbeschadet der Allgemeinheit das obere Vorzeichen wählen, indem über die Richtungen der $y$- und $z$-Achse noch verfügt wird. In entsprechender Weise erhält man für die Coordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ der Curve $C_2$ die Ausdrücke

$$c\cdot\sin q, \qquad \pm q, \qquad \pm c\cdot\cos q,$$

in denen wiederum entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten. Jetzt hat man aber beide Vorzeichen zu berücksichtigen und findet so für die gesuchten Flächen die Gleichungen

$$(11) \quad x = c(\sin p + \sin q), \qquad y = p + \epsilon q, \qquad z = c(\cos p + \epsilon\cos q),$$

in denen $\epsilon = \pm 1$ zu setzen ist.

Für $\epsilon = +1$ ergibt die Elimination von $p$ und $q$ die Gleichung

$$(L) \qquad x : z = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}y,$$

für $\epsilon = -1$ aber

$$z : x = -\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y,$$

sodass man in beiden Fällen die *gemeine geradlinige Schraubenfläche* erhält.

II. Ist $B = -1$, so setze man $A = c^2$. Dann wird ähnlich wie bei I.:

$$x = p + \epsilon q, \qquad y = c(\cos p + \epsilon \cos q), \qquad z = c(\sin p + \sin q),$$

sodass man wiederum zu der gemeinen geradlinigen Schraubenfläche geführt wird.

III. Ist endlich $A = B$, so gelangt man sofort zu dem Fall I. zurück.

Mithin ergeben sich immer, wenn zwei der drei Grössen $s_{11}$, $s_{22}$, $s_{33}$ einander gleich sind, die aus der gemeinen geradlinigen Schraubenfläche $(L)$ durch Aehnlichkeitstransformationen hervorgehenden Flächen, die ebenfalls gemeine geradlinige Schraubenflächen sind. Da in den Gleichungen (11) die willkürliche Constante $c$ auftritt, die in der Gleichung $(L)$ fehlt, so *lässt sich eine jede gemeine geradlinige Schraubenfläche auf unendlich viele Arten durch die Translation von Raumcurven, nämlich von cylindrischen Schraubenlinien, erzeugen.* Im übrigen sei für diese Flächen auf die Arbeiten von S. Lie und auf G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Flächen*, Leipzig, 1902, S. 190 bis 191 sowie Göttinger Nachrichten, November, 1905, verwiesen.

## 11.

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen $s_{11}$, $s_{22}$, $s_{33}$ von einander verschieden sind, folgt aus der Gleichung (9) durch Ausführung der Quadratur:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+A)(A-B)}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{A-B}{1+A}} \cdot \frac{g}{\sqrt{A+Bg^2}}\right) = -s_{33} u,$$

und die entsprechende Gleichung gilt für $l$ und $v$. Setzt man also

$$u_1 = -s_{33}\sqrt{(1+A)(A-B)}\,u, \qquad v_1 = -s_{33}\sqrt{(1+A)(A-B)}\,v,$$

so wird:

$$g = \frac{\sqrt{A(1+A)}\sin u_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 u_1 - (1+A)B\sin^2 u_1}},$$

$$h = \frac{\sqrt{A(A-B)}\cos u_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 u_1 - (1+A)B\sin^2 u_1}};$$

$$l = \frac{\sqrt{A(1+A)}\sin v_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 v_1 - (1+A)B\sin^2 v_1}},$$

$$m = \frac{\sqrt{A(A-B)}\cos v_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 v_1 - (1+A)B\sin^2 v_1}};$$

das Vorzeichen der Quadratwurzeln, die beziehungsweise in $g$ und $h$, $l$ und $m$ auftreten, ist willkürlich, nur muss bei $g$ und $h$ dasselbe Vorzeichen genommen werden, und ebenso bei $l$ und $m$. Da man aber über die Richtungen der $y$- und der $z$-Achse noch verfügt, darf man unbeschadet der Allgemeinheit das Vorzeichen der in $g$ und $h$ auftretenden Wurzel fixieren, während dann die in $l$ und $m$ auftretende Wurzel zweiwertig bleibt.

Aus den so gefundenen Ausdrücken für $f, g, h; k, l, m$ ergeben sich durch Ausführung der Quadraturen, wenn zur Vereinfachung statt $u_1$ und $v_1$ wieder $u$ und $v$ geschrieben wird, für $x, y, z$ selbst die Gleichungen:

$$x = u + v,$$

$$y = -\sqrt{\frac{1+A}{1+B}}\Bigg[\log\frac{\sqrt{A(1+B)}\cos u + \sqrt{(A-B)\cos^2 u - (1+A)B\sin^2 u}}{\sqrt{A(1+B)} + \sqrt{A-B}}$$

$$+ \epsilon\log\frac{\sqrt{A(1+B)}\cos v + \sqrt{(A-B)\cos^2 v - (1+A)B\sin^2 u}}{\sqrt{A(1+B)} + \sqrt{A-B}}\Bigg],$$

$$z = \sqrt{\frac{A-B}{1+B}}\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{A(1+B)}{A-B}}\sin u\right) + \epsilon\arcsin\left(\sqrt{\frac{A(1+B)}{A-B}}\sin v\right)\right].$$

Wenn jetzt noch

$$\sqrt{\frac{1+B}{A-B}} = \operatorname{tg}\gamma, \qquad \sqrt{\frac{A(1+B)}{A-B}} = \lambda$$

gesetzt und eine Aehnlichkeitstransformation im Verhältnis $1 : \sin\gamma$ vorgenommen wird, so ergeben sich schliesslich für die gesuchten Flächen die Gleichungen:

$$(S)\quad\begin{cases} x = \sin\gamma\cdot(u+v), \\ y = -\left[\log\dfrac{\lambda\cos u + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}{\lambda+1} + \epsilon\log\dfrac{\lambda\cos u + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}}{\lambda+1}\right], \\ z = \cos\gamma\cdot[\arcsin(\lambda\sin u) + \epsilon\arcsin(\lambda\sin v)], \end{cases}$$

in denen $\gamma$ und $\lambda$ willkürliche Constanten bedeuten.

## 12.

Es werde zuerst der Fall $\epsilon = -1$ betrachtet, in dem die Gleichungen $(S)$ übergehen in die Gleichungen:

$$(S_1)\quad\begin{cases} x = \sin\gamma\cdot(u+v), \\ y = -\log(\lambda\cos u + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}) + \log(\lambda\cos v + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}), \\ z = \cos\gamma\cdot[\arcsin(\lambda\sin u) - \arcsin(\lambda\sin v)]. \end{cases}$$

Bildet man die Functionaldeterminante von $x, y, z$ nach $u, v, \lambda$, so ergibt eine einfache Rechnung, dass sie identisch verschwindet, und das bedeutet, dass in der Gleichung, die sich aus den Gleichungen $(S_1)$ durch Elimination von $u$ und

$v$ ergibt, also in der Gleichung der betrachteten Fläche, bezogen auf die cartesischen Coordinaten $x$, $y$, $z$, die Constante $\lambda$ fehlt. Nun erhält man aber für $\lambda = 1$:

$$(M) \qquad \begin{cases} x = \sin\gamma\cdot(u+v), \\ y = -\log\cos u + \log\cos v, \\ z = \cos\gamma\cdot(u-v), \end{cases}$$

also die früher gefundene Parameterdarstellung der Scherkschen Minimalflächen:

$$(M^*) \qquad e^y = \frac{\cos(\rho x - rz)}{\cos(\rho x + rz)} \qquad (\rho = 1:2\sin\gamma, \quad r = 1:2\cos\gamma).$$

Man wird hieraus schliessen, dass die Gleichungen $(S_1)$ ebenfalls eine Darstellung der Scherkschen Minimalfläche $(M^*)$ liefern oder vielmehr unendlich viele Darstellungen, indem ja die Constante $\lambda$ für die erzeugenden Curven eine wesentliche Constante ist. Mithin *lässt sich eine jede Scherksche Minimalfläche auf unendlich viele Arten durch die Translation von eigentlichen Raumcurven erzeugen, deren Bogenelement nicht verschwindet.*

Um aus den Gleichungen $(S_1)$ die von $\lambda$ freie Gleichung zwischen $x$, $y$, $z$ wirklich herzustellen, verfährt man am einfachsten so. Wird in diesen Gleichungen

$$v = 0$$

gesetzt, so ergibt sich eine Curve oder vielmehr eine Schar von Curven auf derjenigen Fläche, die zu dem betreffenden Werte des Constanten $\gamma$ gehört, da ja in den Gleichungen

$$(T_1) \qquad \begin{cases} x = \sin\gamma\cdot u, \\ y = -\log\left(\lambda\cos u + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}\right) + \log(\lambda+1), \\ z = \cos\gamma\cdot\arcsin(\lambda\sin u) \end{cases}$$

noch die willkürliche Constante $\lambda$ vorkommt. Der Ort der durch die Gleichungen $(T_1)$ dargestellten Curven ist also die Fläche $(S_1)$, und man braucht daher nur aus den Gleichungen $(T_1)$ $u$ und $\lambda$ zu eliminieren, um die von $\lambda$ freie Gleichung zwischen $x$, $y$, $z$ zu erhalten, die sich dann in der Form $(M^*)$ ergibt.

## 13.

Für $\epsilon = +1$ ergeben sich die Gleichungen:

$$(S_2) \qquad \begin{cases} x = \sin\gamma\cdot(u+v), \\ y = -\log\left(\dfrac{\lambda\cos u + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}{\lambda+1}\right) - \log\left(\dfrac{\lambda\cos v + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}}{\lambda+1}\right), \\ z = \cos\gamma\cdot\left[\arcsin(\lambda\sin u) + \arcsin(\lambda\sin v)\right], \end{cases}$$

bei denen die Functionaldeterminante von $x$, $y$, $z$ nach $u$, $v$, $\lambda$ NICHT identisch verschwindet. Ich hatte daher zuerst geglaubt, dass die Gleichungen $(S_2)$ Flächen liefern würden, die in den Gleichungen $(S_1)$ nicht enthalten sind; wie jedoch G. SCHEFFERS (Göttinger Nachrichten, November, 1905) gezeigt hat, ergeben sich auch hier nur die Scherkschen Flächen, für die man so zwei wesentlich verschiedene Arten von Erzeugung durch Translation erhält.

Um zunächst aus $(S_2)$ eine Schar von Flächen zu erhalten, die nur von dem einen Parameter $\gamma$ abhängt, übe man auf jede Fläche $(S_2)$ eine Translation parallel der $y$-Achse aus, bei der $y$ um den Betrag

$$\log \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

wächst. Auf diese Weise findet man die Flächenschar:

$$(S_2^*) \quad \begin{cases} x = \sin \gamma \cdot (u + v), \\ y = -\log\left(\dfrac{\lambda \cos u + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right) - \log\left(\dfrac{\lambda \cos v + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 v}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right), \\ z = \cos \gamma \cdot [\arcsin(\lambda \sin u) + \arcsin(\lambda \sin v)], \end{cases}$$

bei der jetzt die Functionaldeterminante nach $u$, $v$, $\lambda$ identisch verschwindet, sodass man bei Elimination von $u$ und $v$ eine von $\lambda$ freie Gleichung erhält. Um diese Gleichung herzustellen, braucht man nur zu bedenken, dass die Gleichungen $(S_2^*)$ dieselbe Fläche ergeben, wie auch $\lambda$ gewählt werde. Setzt man in ihnen

$$u = v,$$

so erhält man die auf der Fläche liegenden Curven:

$$(T_2) \quad \begin{cases} x = \sin \gamma \cdot 2u, \\ y = -2 \log\left(\dfrac{\lambda \cos u + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right), \\ z = \cos \gamma \cdot 2 \arcsin(\lambda \sin u), \end{cases}$$

deren Ort wiederum die Fläche ist. Die Gleichungen $(T_2)$ sind also auch eine Darstellung der Fläche, nämlich in den Parametern $u$ und $\lambda$, und jetzt ergibt sich aus $(T_2)$ durch Elimination dieser Parameter sofort die Gleichung

$$e^y = \frac{\cos(\rho x - rz + \frac{1}{2}\pi)}{\cos(\rho x + rz - \frac{1}{2}\pi)},$$

in der $\rho$ und $r$ dieselben Werte, wie bei $(M^*)$ haben.

Das so gewonnene Ergebnis, dass *sich die Scherkschen Flächen auf zwei* *wesentlich verschiedene Arten durch Translation erzeugen lassen*, steht in Einklang mit einem Satze von S. LIE, nach dem man die erzeugenden Curven auf folgende Art erhält. Aus einer der beiden Scharen von Asymptotenlinien (Haupttangentencurven) der Fläche greife man irgend eine Curve heraus, nehme einen ihrer Punkte und ziehe von diesem aus alle Sehnen: die Mitten dieser Sehnen bilden dann eine erzeugende Curve. Je nachdem die herausgegriffene Asymptotenlinie der einen oder der anderen Schar angehört, erhält man die eine oder die andere der beiden Erzeugungsarten, und zwar wird durch die Gleichungen ($T_2$) die eine der beiden Scharen, durch die Gleichungen ($S_2^*$) die zugehörige Erzeugung dargestellt.

HANNOVER, TECHNISCHE HOCHSCHULE.